

LAPORAN AKHIR
PENELITIAN UNGGULAN PERGURUAN TINGGI (M)



PENGEMBANGAN MODEL NUMERIK PENYEBARAN PENYAKIT
DENGAN TINGKAT KEJADIAN INFEKSI NONLINEAR
DAN MASA INKUBASI
Tahun ke - 1 dari rencana 2 (dua) tahun

Prof. Dr. Agus Suryanto, M. Sc.

NIDN: 0007086903

Dr. Wuryansari Muharini K., M.Si.

NIDN: 0028076603

Indah Yanti, S.Si., M.Si.

NIDN: 0029117902

Dibiayai oleh :
Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi,
Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, Melalui DIPA Universitas Brawijaya
Nomor : DIPA-023.04.2.414989/2013, Tanggal 5 Desember 2012, dan berdasarkan
SK Rektor Universitas Brawijaya Nomor : 295/SK/2013 tanggal 12 Juni 2013

UNIVERSITAS BRAWIJAYA
Nopember 2013

HALAMAN PENGESAHAN

Judul : Pengembangan model numerik penyebaran penyakit dengan tingkat kejadian infeksi nonlinear dan masa inkubasi

Peneliti / Pelaksana
 Nama Lengkap : Prof. Dr. Agus Suryanto, M.Sc.
 NIDN : 0007086903
 Jabatan Fungsional : Guru Besar
 Program Studi : Matematika
 Nomor HP : 08123304843
 Alamat surel (e-mail) : suryanto@ub.ac.id

Anggota (1)
 Nama Lengkap : Dr. Wuryansari Muharini K., M.Si
 NIDN : 0028076603
 Perguruan Tinggi : Universitas Brawijaya

Anggota (2)
 Nama Lengkap : Indah Yanti, S.Si., M.Si.
 NIDN : 0029117902
 Perguruan Tinggi : Universitas Brawijaya

Perguruan Tinggi : Tidak Ada
 Institusi Mitra (jika ada)
 Nama Institusi Mitra : ---
 Alamat : ---
 Penanggung Jawab : ---
 Tahun Pelaksanaan : Tahun ke -1 dari rencana 2 tahun
 Biaya Tahun Berjalan : Rp. 59.500.000,-
 Biaya Keseluruhan : Rp. 120.000.000,-

Mengetahui,
 Dekan Fakultas MIPA

Prof. Dr. Marjono, M.Phil.
 NIP. 19621116 198803 1 004

Malang, 29 Nopember 2013
 Ketua Peneliti,

Prof. Dr. Agus Suryanto, M.Sc.
 NIP. 19690807 199412 1 001

Menyetujui,
 LPPM Universitas Brawijaya
 Ketua,

Prof. Dr. Ir. Siti Chuzaemi, MS.
 NIP. 19530514 198002 2 001

ABSTRAK

Pada penelitian ini dikonstruksi model numerik untuk penyebaran penyakit menular (epidemi). Model-model epidemi yang dibahas adalah model epidemi SIR dengan tingkat kejadian non-monoton tanpa masa inkubasi, model epidemi SIR dengan tingkat kejadian tersaturasi dengan masa inkubasi, dan model epidemi *host-vector* dengan transmisi langsung. Khususnya akan dikonstruksi skema numerik untuk dua model yang pertama, yaitu skema Euler dan beda hingga tak-standar. Dari hasil analisis, skema Euler untuk model epidemi SIR dengan tingkat kejadian non-monoton dan tanpa masa inkubasi konsisten secara dinamik hanya jika langkah waktu integrasi (h) bernilai cukup kecil; sementara skema beda hingga tak-standar selalu konsisten tanpa bergantung pada h . Untuk model epidemi dengan tingkat kejadian tersaturasi dan masa inkubasi, kedua skema numerik (Euler dan beda hingga tak-standar) mengalami bifurkasi Neimark-Sacker yang dikendalikan oleh waktu tunda (masa inkubasi). Tetapi titik bifurkasi kedua model diskret sangat bergantung pada lebar langkah waktu interaksi (h). Hasil-hasil analisis tersebut telah didukung oleh hasil-hasil simulasi numerik yang dilakukan. Pada penelitian ini juga ditinjau model epidemik *host-vector* dengan transmisi langsung, untuk menentukan dua kontrol yaitu kontrol pencegahan untuk meminimumkan kontak antara *host* dan *vector* dan kontrol pembasmian populasi *vector*. Tujuan kontrol optimal adalah untuk mendapatkan strategi pencegahan optimal dan meminimumkan biaya yang digunakan untuk menerapkan kontrol. Kontrol optimal diperoleh dengan menerapkan Prinsip Minimum Pontryagin. Selanjutnya, sistem optimal akan diselesaikan secara numerik untuk memeriksa adanya keefektifan kontrol dalam mereduksi kontak antara *host* dan *vector*.

ABSTRACT

In this research, we construct a numerical model for three epidemic models, i.e. a SIR epidemic model with non-monoton incidence rate without incubation period, SIR epidemic model with a modified saturated incidence rate with incubation period and hostvector epidemic model with direct transmission. To obtain numerical models, we

implement both Euler method and nonstandard finite difference methods. It is found that the Euler scheme is dynamically consistent with its continuous model only when the time step of integration (h) is small enough while the nonstandard finite difference scheme is always dynamically consistent without depending on h . We also derive two numerical schemes (Euler scheme and nonstandard finite difference scheme) for SIR epidemic model with modified saturated incidence rate with incubation. It is shown that both discrete systems undergo Neimark-Sacker bifurcation controlled by the time delay. However, the critical time delays of both systems depend on h . Such analytical findings have been confirmed by some numerical simulations. The last part of this research discusses about optimal control for a host-vector epidemic model with direct transmission to assess the impact of two control measures, i.e. the preventive control to minimize vector-host contacts and the insecticide control to the vector. The aim is to derive optimal prevention strategies with minimal implementation cost. The characterization of optimal control is performed analytically by applying Pontryagin Minimum Principle. The obtained optimality system is then solved numerically to investigate that there are cost effective control efforts in reducing the incidence of infectious hosts and vectors. The numerical simulations with and without control show that the control strategy helps to reduce the number of both infective host and infective vector significantly.

RINGKASAN

Pada penelitian ini dikonstruksi model numerik untuk penyebaran penyakit menular (epidemi). Model penyebaran penyakit yang dipertimbangkan adalah model epidemi SIR dengan tingkat kejadian infeksi nonlinear, khususnya tingkat kejadian infeksi yang melibatkan efek sosial atau psikologi, dan sekaligus mempertimbangkan pengaruh masa inkubasi. Pada bagian pertama dikonstruksi baik skema beda hingga standar (Euler) maupun tak standar untuk model epidemi SIR dengan tingkat kejadian infeksi non-monoton tanpa masa inkubasi (waktu tunda). Kedua skema yang dikonstruksi dianalisis untuk menentukan sifat-sifat dinamikanya. Sifat-sifat dinamik tersebut juga diamati dalam beberapa simulasi numerik yang telah dilakukan. Hasil-hasil analisis

maupun numerik menunjukkan bahwa skema beda hingga tak standar konsisten secara dinamik dengan model kontinu tanpa syarat sedangkan skema Euler konsisten secara dinamik hanya jika integrasi numerik dilakukan dengan menggunakan langkah waktu yang cukup kecil.

Pada bagian kedua, dibahas skema numerik untuk model epidemi SIR dengan tingkat kejadian infeksi tersaturasi dengan masa inkubasi. Masa inkubasi penyakit dimodelkan secara matematika dalam bentuk waktu tunda. Dua macam skema numerik, yaitu skema Euler (beda hingga standar) dan skema beda hingga tak standar telah dikonstruksi untuk model tersebut. Analisis dinamik telah dilakukan termasuk penentuan titik kesetimbangan dan kestabilannya. Analisis dinamik untuk kedua skema juga dilakukan untuk menentukan keberadaan bifurkasi Neimark-Sacker. Dari hasil analisis, diperoleh kesimpulan bahwa kedua model diskret mempunyai titik kesetimbangan (titik bebas penyakit dan titik endemi) dan eksistensinya yang tepat sama dengan model kontinu. Syarat kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit dari model diskret tak standar tepat sama dengan model kontinu sementara kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit dari model diskret standar (Euler) bergantung pada langkah waktu integrasi (h), yaitu konsisten hanya untuk h yang cukup kecil. Juga ditunjukkan bahwa kedua model diskret (standar dan tak-standar) mengalami bifurkasi Neimark-Sacker yang dikendalikan oleh waktu tunda (masa inkubasi). Tetapi titik bifurkasi kedua model diskret sangat bergantung pada lebar langkah waktu interaksi (h). Hasil tersebut juga didukung oleh hasil simulasi numerik yang dilakukan.

Pada bagian terakhir dibahas kontrol optimal model epidemik *host-vector* dengan transmisi langsung, dengan menentukan dua kontrol yaitu kontrol pencegahan untuk meminimumkan kontak antara *host* dan *vector* dan kontrol pembasmian populasi *vector*. Tujuan kontrol optimal adalah untuk mendapatkan strategi pencegahan optimal dan meminimumkan biaya yang digunakan untuk menerapkan kontrol. Kontrol optimal diperoleh dengan menerapkan Prinsip Minimum Pontryagin. Selanjutnya, sistem optimal akan diselesaikan secara numerik untuk memeriksa adanya keefektifan kontrol dalam mereduksi kontak antara *host* dan *vector*.

SUMMARY

In this research, we construct a numerical model for epidemic model with nonlinear incidence rate. Specifically we consider a SIR epidemic model with nonlinear incidence rate which describes the social or psychological effects; as well as the effect of incubation period.

The first part of this research consider SIR epidemic model with non-monoton incidence rate without incubation period. To obtain numerical models, we implement both Euler method and nonstandard finite difference methods. The dynamical analysis shows that the Euler scheme is dynamically consistent with its continuous model only when the time step of integration (h) is small enough. However the nonstandard finite difference scheme is always dynamically consistent without depending on h . Such analytical findings have been confirmed by some numerical simulations.

In the second part, we construct a numerical model for SIR epidemic model with a modified saturated incidence rate with incubation period. The incubation period is mathematically modeled by a time delay. For this model, we also derive two numerical schemes, i.e. Euler scheme and nonstandard finite difference scheme. We show that both discrete systems obtained by Euler method and nonstandard finite difference method have exactly the same equilibrium points (disease free equilibrium point and endemic equilibrium point) as its original continuous model. The stability condition for disease free equilibrium of the nonstandard finite difference scheme is dynamically consistent without any restriction while that of Euler scheme is consistent only for small h . It is also shown that the endemic equilibrium point of both discrete systems undergo NeimarkSacker bifurcation controlled by the time delay. However, the critical time delays of both systems depend on h . To illustrate our analytical results, some numerical simulations have been performed.

The last part of this research discusses about optimal control for a host-vector epidemic model with direct transmission to assess the impact of two control measures, i.e. the preventive control to minimize vector-host contacts and the insecticide control to the vector. The aim is to derive optimal prevention strategies with minimal implementation cost. The characterization of optimal control is performed analytically by applying

Pontryagin Minimum Principle. The obtained optimality system is then solved numerically to investigate that there are cost effective control efforts in reducing the incidence of infectious hosts and vectors. The numerical simulations with and without control show that the control strategy helps to reduce the number of both infective host and infective vector significantly.

DAFTAR PUSTAKA

- R.M. Anderson dan R.M. May, 1991, *Infectious Diseases in Humans: Dynamics and Control*, Oxford: Oxford University Press.
- R. Anguelov dan J.M.-S. Lubuma, 2003, Nonstandard Finite Difference Method by Nonlocal Approximation, *Math. Comput. Simul.* **61**: 465-475.
- A.J. Arenas, J.A. Morano, dan J.C. Cortés, 2008, Non-Standard Numerical Method for a Mathematical Model of RSV Epidemiological Transmission, *Comput. Math. Appl.* **56**: 670-678.
- A.J. Arenas, G. González-Parra dan B.M. Chen-Charpentier, 2010, A Nonstandard Numerical Scheme of Predictor-Corrector Type for Epidemic Models, *Comput. and Math. Appl.* **59**: 3740-3749.
- F. Brauer dan C. Castillo-Chavez, 2001, *Mathematical models in population biology and epidemiology*, Springer-Verlag.
- F. Brauer, 2006, Some simple epidemic models, *Math. Biosci. Eng.*, **3**(1): 1–15.
- S. Busenberg dan K. Cooke, 1993, *Vertically Transmitted Disease-Model and Dynamics*, Springer-Verlag, New York.
- L. Cai dan X. Li. 2010. Analysis of a Simple Vector-Host Epidemic Model with Direct Transmission. *Discrete Dynamical in Nature and Society*, 2010:2010, Article ID 679613, doi:10.1155/2010/679613.
- V. Capasso dan G. Serio, 1978, A Generalisation of the Kermack-McKendrick Deterministic Epidemic Model, *Math. Biosci.* **42**: 43-61.
- D.T. Dimitrov dan H.V. Kojouharov, 2005, Nonstandard Finite Difference Schemes for General Two Dimensional Autonomous Systems, *Appl. Math. Lett.* **18**: 769-774.
- D.T. Dimitrov dan H.V. Kojouharov, 2008, Nonstandard Finite Difference Method for Predator-Prey Models with General Functional Response, *Math. Comput. Simul.* **78**: 1-11.
- C.J. Duncan, S.R. Duncan dan S. Scott, 1996, Whooping Cough Epidemic in London, 1701–1812: Infection Dynamics Seasonal Forcing and the Effects of Malnutrition, *Proc. R. Soc. Lond. B* **263**: 445–450.

- T. Fayeldi, 2013, Perilaku dinamik model epidemi SIR diskret dengan tingkat kejadian nonmonoton, Tesis S2 Matematika FMIPA Universitas Brawijaya.
- A.B. Gumel, S. Ruan, T. Day, J. Watmough, F. Brauer, P. van den Driessche, D. Gabrielson, C. Bowman, M.E. Alexander, S. Ardal, J. Wu dan B.M. Sahai, 2004, Modelling strategies for controlling SARS outbreaks, *P. Roy. Soc. Lond. B Bio.*, **271**: 2223–2232.
- H.W. Hethcote, 2000, The Mathematics of Infectious Diseases, *SIAM Rev.* **42**: 599-653.
- H.W. Hethcote, M.A. Lewis dan P. van den Driessche, 1989, An epidemiological model with delay and a nonlinear incidence rate, *J. Math. Biol.*, **27**: 49–64.
- H.W. Hethcote dan P. van den Driessche, 1991, Some epidemiological model with nonlinear incidence, *J. Math. Biol.*, **29**: 271–287.
- H. Jansen dan E.H. Twizell, 2002, An Unconditional Convergent Discretization of the SEIR Model, *Math. Comput. Simul.* **58**: 147-158.
- Z. Jiang dan J. Wei, 2008, Stability and bifurcation analysis in a delayed SIR model, *Chaos, Solitons and Fractals*, **35**: 609-619.
- A. Kaddar, 2009, On the dynamics of a delayed SIR epidemic model with a modified saturated incidence rate, *Electr. J. of Diff. Eq.* **2009**(133):1–7.
- A. Kaddar, 2010, Stability analysis in a delayed SIR epidemic model with a saturated incidence rate, *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, **15** (3): 299–306.
- W.O. Kermack dan A.G. McKendrick, 1927, A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemic, *Proc. R. Soc. London A* **115**: 700-721.
- J.D. Lambert, 1991, *Numerical Methods for Ordinary Differential Systems: The Initial Value Problem*, Wiley, Chicester, England.
- W. M. Liu, S. A. Levin dan Y. Iwasa, 1986, Influence of nonlinear incidence rates upon the behaviour of SIRS epidemiological models, *J. Math. Biol.*, **23**: 187–204.
- W.M. Liu, H.W. Hethcote dan S.A. Levin, 1987, Dynamical behaviour of

- epidemiological models with nonlinear incidence rates, *J. Math. Biol.*, **25**: 359–380.
- D.E. Mahmudah, 2013, Kontrol optimal model epidemic *host-vector* dengan transmisi langsung, Tesis S2 Matematika FMIPA Universitas Brawijaya.
- H. McCallum, N. Barlow dan J. Hone, 2001, How should pathogen transmission be modelled?, *Trends Ecol. Evol.*, **16**: 295–300.
- R.E. Mickens, 1994, *Nonstandard Finite Difference Schemes*, World Scientific, Singapore.
- R.E. Mickens, 2000, *Application of Nonstandard Finite Difference Schemes*, World Scientific Publishing Co Pte. Ltd.
- R.E. Mickens, 2005, Dynamic Consistency: a Fundamental Principle for Constructing Nonstandard Finite Difference Schemes for Differential Equations, *Journal of Difference Equations and Applications* **11 (7)**: 645-653.
- R.E. Mickens, 2007, Numerical Integration of Population Models Satisfying Conservation Laws: NSFD Methods, *Journal of Biological Dynamics* **1 (4)**: 427- 436.
- R.E. Mickens dan T.M. Talitha, 2010, A Note on an NSFD Scheme for a Mathematical Model of Respiratory Virus Transmission, *Journal of Difference Equations and Applications*, accepted.
- S. Pathak, A. Maiti dan G.P. Samanta, 2010, Rich Dynamics of an SIR Epidemic Model, *Nonlinear Analysis: Modelling and Control* **15(1)**, 71–81.
- W. Piyawong, E.H. Twizell dan. A.B. Gumel, 2003, An Unconditionally Convergent Finite Difference Scheme for the SIR Model, *Appl. Math. Comput.* **146**: 611-625.
- S. Ruan dan W. Wang, 2003, Dynamical behaviour of an epidemic model with nonlinear incidence rate, *J. Differ. Equations*, **188**: 135–163.
- A. Suryanto, 2011a, A Dynamically Consistent Nonstandard Numerical Scheme for Epidemic Model with Saturated Incidence Rate, *Int. J. of Mathematics and Computation* Vol. 13 (D11), 112-123.
- A. Suryanto, 2011b, A Dynamically consistent numerical method for SIRS epidemic model with non-monotone incidence rate, *Proceeding The*

7th International Conference on Mathematics, Statistics and its Applications (ICMSA 2011), NIDA, Bangkok, Thailand.

- A. Suryanto, 2011c, A Conservative Nonstandard Finite Difference Scheme for SIR Epidemic Model, *Proceeding the 3rd International Conferences and Workshops on Basic and Applied Sciences (ICOWOBAS 2011)*, Surabaya.
- A. Suryanto, M. Muslikh dan U, Habibah, 2011d, Skema beda hingga tak-standar konservatif untuk model epidemi SIR, Laporan Penelitian DPP/SPP FMIPA Universitas Brawijaya.
- A. Suryanto dan W.M. Kusumawinahyu, 2012, Pengembangan model numerik penyebaran penyakit dengan tingkat kejadian infeksi nonlinear, Laporan Penelitian Unggulan Perguruan Tinggi – Fundamental Universitas Brawijaya.
- A. Suryanto, 2012, A Nonstandard Finite Difference Scheme for SIS Epidemic Model with Delay: Stability and Bifurcation Analysis, *Applied Mathematics* Vol. 3 (6), 528-534.
- A. Suryanto, W.M. Kusumawinahyu, I. Darti, I. Yanti, 2013, Dynamically consistent discrete epidemic model with modified saturated incidence rate, *Comp. Appl. Math.*, *in press*, DOI 10.1007/s40314-013-0026-6
- W.Wang dan S. Ruan, 2004, Simulating the SARS outbreak in Beijing with limited data,
J. Theor. Biol. **227**: 369–379.
- C. Wei dan L. Chen, 2008, A delayed epidemic model with pulse vaccination, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, **2008**, Article ID 746951.
- World Health Organization, 2004, Communicable Disease Surveillance and Response, www.who.int/csr/disease/influenza/. Akses tanggal 30 Januari 2011.
- World Health Organization, 2005, Pandemic Preparedness, www.who.int/csr/disease/influenza/pandemic/en/index.html. Akses tanggal 30 Januari 2011.
- D. Xiao dan S. Ruan, 2007, Global analysis of an epidemic model with non-monotone incidence rate, *Math. Biosci.* **208**: 419-429.
- R. Xu dan Z. Ma, 2009, Stability of a delayed SIRS epidemic model with a nonlinear incidence rate, *Chaos, Solitons and Fractals*, **41**(5): 2319-2325.

- I. Yanti, 2012, Skema numerik untuk model epidemi SIR dengan tingkat kejadian infeksi nonmonoton, Tesis S2 Matematika FMIPA Universitas Brawijaya.
- J.-Z. Zhang, Z. Jin, Q.-X. Liu dan Z.-Y. Zhang, 2008, Analysis of a delayed SIR model with nonlinear incidence rate, *Discrete Dynamics in Nature and Society* **2008**, Article ID 66153.